Processamento de Malhas Poligonais

Tópicos Avançados em Computação Visual e Interfaces I

Prof.: Marcos Lage

www.ic.uff.br/~mlage

mlage@ic.uff.br

Conteúdo: Notas de Aula

Geometria Diferencial Discreta

Curvas

Curvas

Definição de Curva

Consideraremos curvas planas suaves, ou seja, variedades de dimensão 1 de classe C^∞, imersas em $\mathbb{R}^2$.

Curvas

Definição de Curva

Consideraremos curvas planas suaves, ou seja, variedades de dimensão 1 de classe C^∞, imersas em $\mathbb{R}^2$.

Forma paramétrica:

$$\mathbf{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{x}(u) = (x(u), y(u))^T$$

Curvas

Definição de Curva

Consideraremos curvas planas suaves, ou seja, variedades de dimensão 1 de classe C^∞, imersas em $\mathbb{R}^2$.

Forma paramétrica:

$$\mathbf{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{x}(u) = (x(u), y(u))^T$$

Obs: Como a curva é suave, suas funções coordenadas são suaves.

Curvas

Definição de Vetor tangente

O vetor tangente $\mathbf{x}'(u)$, em um ponto $\mathbf{x}(u)$ é definido como a primeira derivada da parametrização:

$$\mathbf{x}'(u) = (x'(u), y'(u))^T$$

Curvas

Definição de Vetor tangente

O vetor tangente $\mathbf{x}'(u)$, em um ponto $\mathbf{x}(u)$ é definido como a primeira derivada da parametrização:

$$\mathbf{x}'(u) = (x'(u), y'(u))^T$$

Obs: Podemos interpretar a parametrização como a trajetória de um ponto em função do tempo *(u = t)* e o vetor tangente como a velocidade em um determinado instante *t*.

O vetor tangente $\mathbf{x}'(u)$, em um ponto $\mathbf{x}(u)$ é definido como a primeira derivada da parametrização:

$$\mathbf{x}'(u) = (x'(u), y'(u))^T$$

Obs: Podemos interpretar a parametrização como a trajetória de um ponto em função do tempo *(u = t)* e o vetor tangente como a velocidade em um determinado instante *t*.

Obs: Assumiremos que a parametrização é regular, isto é:

$$\mathbf{x}'(u) \neq \mathbf{0} \quad \forall u \in [a, b]$$

Curvas

Vetor Normal

O vetor normal $\mathbf{n}(u)$, em um ponto $\mathbf{x}(u)$ é definido pode ser calculado como:

$$\mathbf{n}(u) = \frac{\mathbf{x}'(u)^{\perp}}{||\mathbf{x}'(u)^{\perp}||}$$

O vetor normal $\mathbf{n}(u)$, em um ponto $\mathbf{x}(u)$ é definido pode ser calculado como:

$$\mathbf{n}(u) = \frac{\mathbf{x}'(u)^{\perp}}{||\mathbf{x}'(u)^{\perp}||}$$

$\mathbf{x}'(u)^{\perp}$ é a rotação do vetor tangente de 90 graus.

Curvas

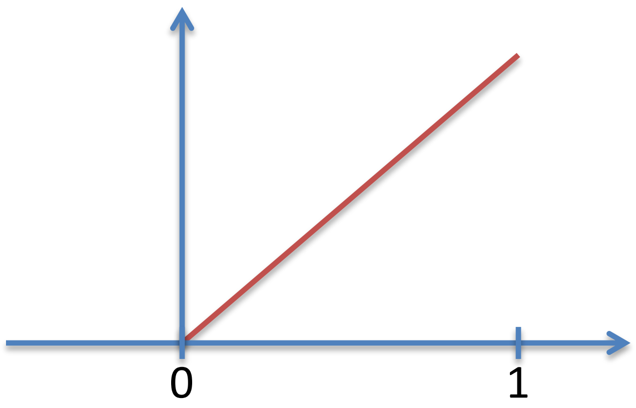
Reparametrização de curvas

Uma mesma curva pode ser parametrizada de maneiras distintas:

$$\mathbf{x}_1(u) = (u, u) \qquad \mathbf{x}_2(u) = (u^2, u^2)$$

Uma mesma curva pode ser parametrizada de maneiras distintas:

$$\mathbf{x}_1(u) = (u, u) \qquad \mathbf{x}_2(u) = (u^2, u^2)$$



Curvas

Reparametrização de curvas

Uma mesma curva pode ser parametrizada de maneiras distintas.

Obs: A geometria diferencial de curvas planas estuda propriedades das curvas que são independentes da escolha da parametrização.

O comprimento $l(c,d)$ de um segmento curvo definido em um intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ é definido como:

$$l(c,d) = \int_c^d ||\mathbf{x}'(u)||du$$

Curvas

Comprimento de Arco

O comprimento $l(c,d)$ de um segmento curvo definido em um intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ é definido como:

$$l(c,d) = \int_c^d ||\mathbf{x}'(u)|| du$$

Obs: O vetor tangente codifica a métrica da curva.

O comprimento $l(c,d)$ de um segmento curvo definido em um intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ é definido como:

$$l(c,d) = \int_c^d ||\mathbf{x}'(u)||du$$

Obs: Podemos reescrever uma parametrização preservando o comprimento de arco de forma única e independe da escolha da parametrização inicial:

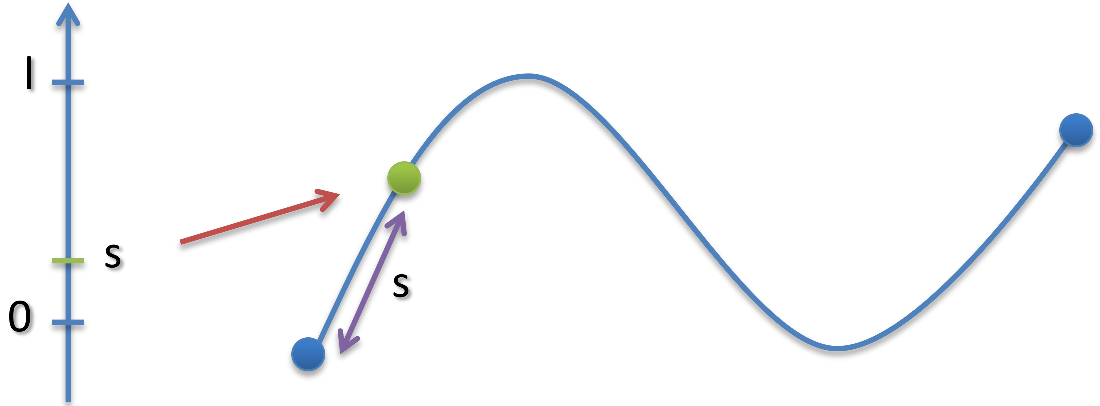
$$s = s(u) = \int_a^u ||\mathbf{x}'(t)||dt$$

Curvas

Comprimento de Arco

Contas importantes:

$$s(a) = \int_a^a ||\mathbf{x}'(t)||dt = 0 \quad \text{analogamente} \quad s(b) = \int_a^b ||\mathbf{x}'(t)||dt = L$$



Exemplos:

$$\mathbf{x}_1(u) = (u, u) \qquad \mathbf{x}_2(u) = (u^2, u^2)$$

Supondo que uma curva regular esteja parametrizada por comprimento de arco, podemos definir a curvatura de um ponto $\mathbf{x}(s)$ como:

$$k(s) = ||\mathbf{x}''(s)||$$

Supondo que uma curva regular esteja parametrizada por comprimento de arco, podemos definir a curvatura de um ponto $\mathbf{x}(s)$ como:

$$k(s) = ||\mathbf{x}''(s)||$$

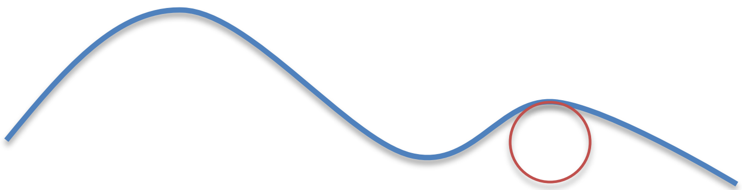
Obs: Intuitivamente, a curvatura mede o quão rápido a curva se afasta de uma linha reta. Em outras palavras:

$$\mathbf{x}''(s) = k(s)\mathbf{n}$$

Supondo que uma curva regular esteja parametrizada por comprimento de arco, podemos definir a curvatura de um ponto $\mathbf{x}(s)$ como:

$$k(s) = ||\mathbf{x}''(s)||$$

Obs: A curvatura também pode ser definida como o inverso do raio do círculo osculador, tangente a curva em $\mathbf{x}(s)$.



Geometria Diferencial Discreta

Curvas

Superfícies

Superfícies

Definição de Superfície

Consideraremos superfícies suaves, ou seja, variedades de dimensão 2 de classe C^∞, orientáveis imersas em $\mathbb{R}^3$.

Consideraremos superfícies suaves, ou seja, variedades de dimensão 2 de classe C^∞, orientáveis imersas em $\mathbb{R}^3$.

Forma paramétrica:

$$\mathbf{x} : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$$

Consideraremos superfícies suaves, ou seja, variedades de dimensão 2 de classe C^∞, orientáveis imersas em $\mathbb{R}^3$.

Forma paramétrica:

$$\mathbf{x} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$$

Obs: Como a superfície é suave, suas funções coordenadas são suaves.

Superfícies

Definição de Superfície

Consideraremos superfícies suaves, ou seja, variedades de dimensão 2 de classe C^∞, orientáveis imersas em $\mathbb{R}^3$.

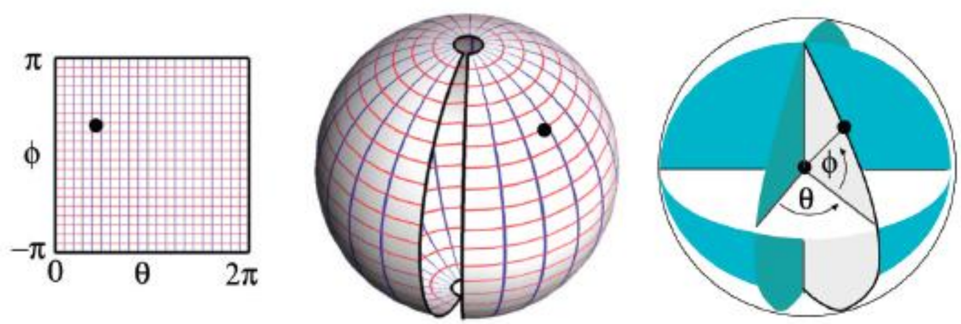
Exemplo:

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,2\pi], \ \phi \in [-\pi/2,\pi/2],$$

Consideraremos superfícies suaves, ou seja, variedades de dimensão 2 de classe C^∞, orientáveis imersas em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo:

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,2\pi],\ \phi \in [-\pi/2,\pi/2],$$



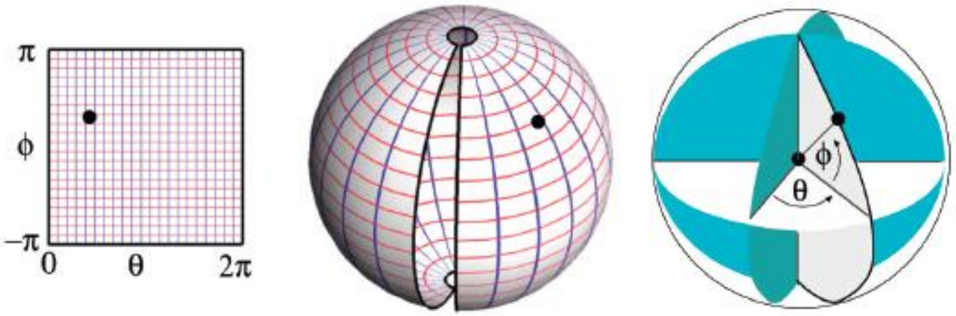
Superfícies

Definição de Superfície

Consideraremos superfícies suaves, ou seja, variedades de dimensão 2 de classe C^∞, orientáveis imersas em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo:

$$\theta = constante \qquad \phi = constante$$



Consideraremos superfícies suaves, ou seja, variedades de dimensão 2 de classe C^∞, orientáveis imersas em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo:

$$\theta = constante \qquad \phi = constante$$

Superfícies

Plano Tangente

De forma análoga às curvas, a métrica de uma superfície é representada pelas primeiras derivadas da parametrização $\mathbf{x}(u, v)$.

De forma análoga às curvas, a métrica de uma superfície é representada pelas primeiras derivadas da parametrização $\mathbf{x}(u,v)$.

Obs: Assumiremos que a parametrização é regular, isto é:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0,v_0) \neq 0 \qquad \forall (u_0,v_0) \in [a,b] \times [c,d]$$

Superfícies

Plano Tangente

De forma análoga às curvas, a métrica de uma superfície é representada pelas primeiras derivadas da parametrização $\mathbf{x}(u,v)$.

$$\mathbf{x}_u(u_0,v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0,v_0) \qquad \mathbf{x}_v(u_0,v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0,v_0)$$

De forma análoga às curvas, a métrica de uma superfície é representada pelas primeiras derivadas da parametrização $\mathbf{x}(u,v)$.

$$\mathbf{x}_u(u_0,v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0,v_0) \qquad \mathbf{x}_v(u_0,v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0,v_0)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

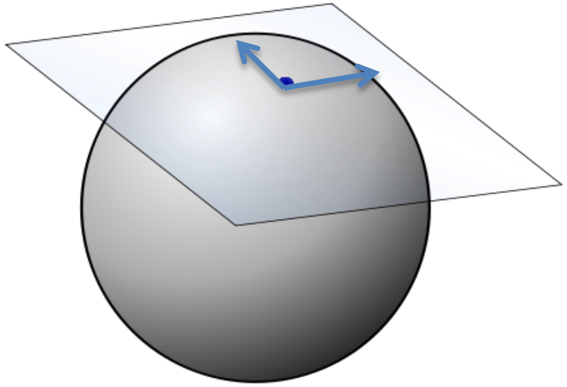
$$\mathbf{C}_\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(u_0+t, v_0) \qquad \mathbf{C}_\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}(u_0, v_0+t)$$

O plano tangente à superfície em um ponto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ é plano gerado pelos vetores

$$\mathbf{x}_u(u_0, v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{x}_v(u_0, v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

O plano tangente à superfície em um ponto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ é plano gerado pelos vetores

$$\mathbf{x}_u(u_0, v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{x}_v(u_0, v_0) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

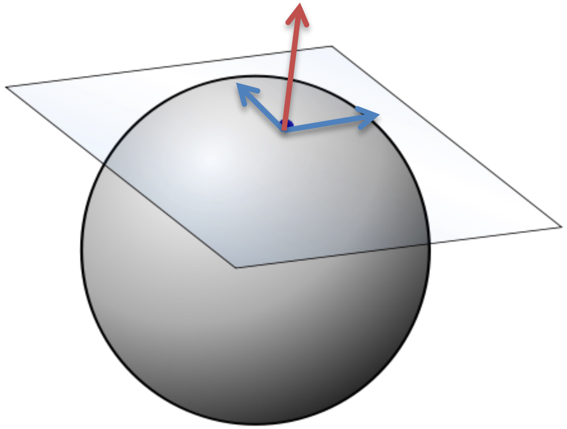


O vetor normal à superfície em um ponto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ dado por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

O vetor normal à superfície em um ponto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ dado por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$



Superfícies

Derivada Direcional

Podemos definir derivadas de direção arbitrária sobre a superfície.

Podemos definir derivadas de direção arbitrária sobre a superfície.

Seja $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$ um vetor direção definido no espaço de parâmetros.
Considere uma reta que passe por (u_0, v_0) e seja orientada por $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$.

Podemos definir derivadas de direção arbitrária sobre a superfície.

Seja $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$ um vetor direção definido no espaço de parâmetros.
Considere uma reta que passe por (u_0, v_0) e seja orientada por $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$.

$$(u, v) = (u_0, v_0) + t\bar{\mathbf{w}}.$$

Geometria Diferencial Discreta

Podemos definir derivadas de direção arbitrária sobre a superfície.

Seja $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$ um vetor direção definido no espaço de parâmetros.
Considere uma reta que passe por (u_0, v_0) e seja orientada por $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$.

$$(u, v) = (u_0, v_0) + t\bar{\mathbf{w}}.$$

Imagem: $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{x}(u_0 + tu_w, v_0 + tv_w).$

Podemos definir derivadas de direção arbitrária sobre a superfície.

Seja $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$ um vetor direção definido no espaço de parâmetros.
Considere uma reta que passe por (u_0, v_0) e seja orientada por $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$.

$$(u, v) = (u_0, v_0) + t\bar{\mathbf{w}}.$$

Imagem: $\mathbf{C_w}(t) = \mathbf{x}(u_0 + tu_w, v_0 + tv_w).$

A derivada da curva $\mathbf{C_w}(t)$ é tangente à superfície em (u_0, v_0) para *t = 0*.

Podemos definir derivadas de direção arbitrária sobre a superfície.

Seja $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$ um vetor direção definido no espaço de parâmetros.
Considere uma reta que passe por (u_0, v_0) e seja orientada por $\bar{\mathbf{w}} = (u_w, v_w)^T$.

$$(u, v) = (u_0, v_0) + t\bar{\mathbf{w}}.$$

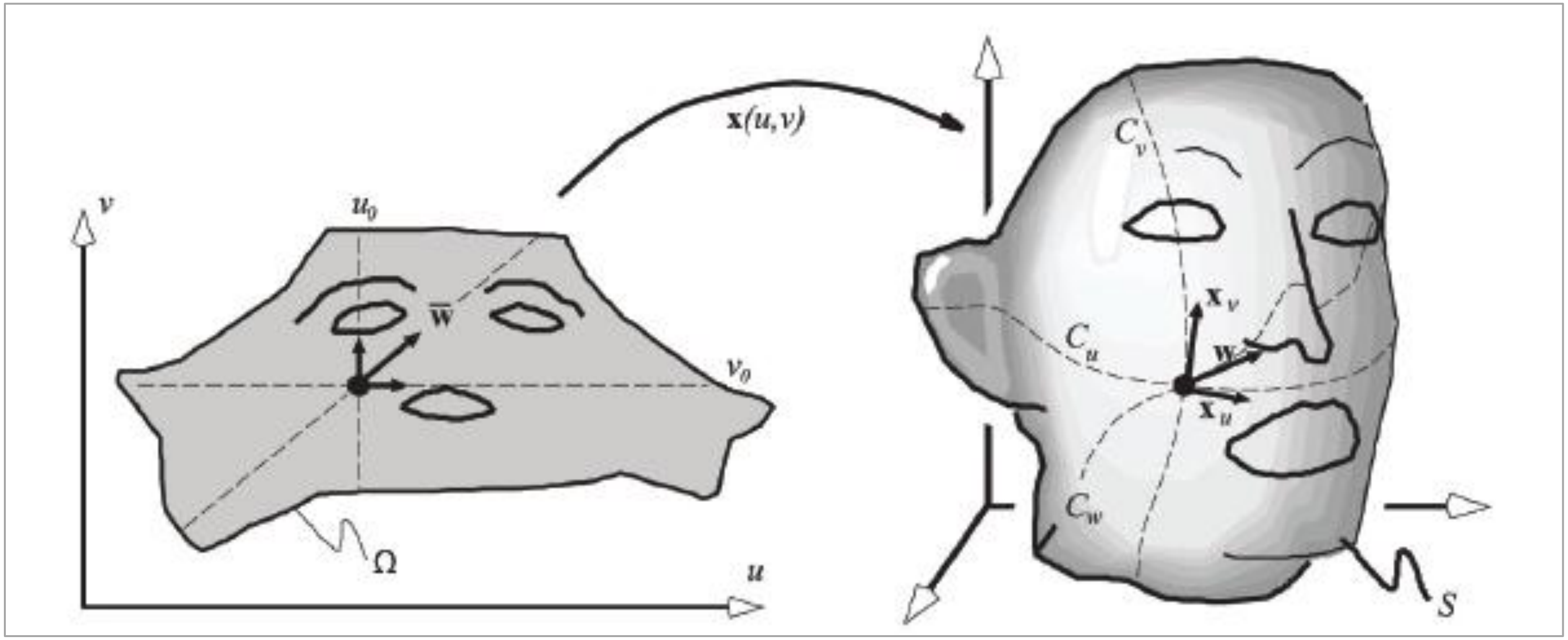
Imagem: $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}(t) \;=\; \mathbf{x}(u_0 + tu_w, v_0 + tv_w).$

A derivada da curva $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}(t)$ é tangente à superfície em (u_0, v_0) para *t = 0*.

Vetor tangente: $\mathbf{w} \;=\; \partial \mathbf{C}_{\mathbf{w}}(t)/\partial t.$.

Superfícies

Derivada Direcional



Superfícies

Matriz Jacobiana

Vetor tangente: $\mathbf{w} = \partial \mathbf{C}_{\mathbf{w}}(t)/\partial t.$.

Pela regra da cadeia...

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{w}} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_u \, , \, \mathbf{x}_v] \, .$$

Vetor tangente: $\mathbf{w} = \partial \mathbf{C}_{\mathbf{w}}(t)/\partial t.$.

Pela regra da cadeia...

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{w}} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{x}_u \, , \, \mathbf{x}_v\right] .$$

Obs: A matriz Jacobiana transforma vetores do espaço de parâmetros em vetores sobre a superfície.

Superfícies

Matriz Jacobiana

Vetor tangente: $\mathbf{w} = \partial \mathbf{C}_{\mathbf{w}}(t)/\partial t.$.

Pela regra da cadeia...

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{w}} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_u \, , \, \mathbf{x}_v] \, .$$

Obs: De forma mais geral, a matriz Jacobiana codifica como ângulos, distâncias e áreas são deformadas pela parametrização.

Sejam $\bar{\mathbf{w}}_1$ e $\bar{\mathbf{w}}_2$ direções unitárias no espaço de parâmetros.

Podemos calcular o produto escalar entre seus vetores tangente correspondentes:

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2 = (\mathbf{J}\bar{\mathbf{w}}_1)^T (\mathbf{J}\bar{\mathbf{w}}_2) = \bar{\mathbf{w}}_1^T \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J}\right) \bar{\mathbf{w}}_2 .$$

Sejam $\bar{\mathbf{w}}_1$ e $\bar{\mathbf{w}}_2$ direções unitárias no espaço de parâmetros.

Podemos calcular o produto escalar entre seus vetores tangente correspondentes:

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2 = (\mathbf{J}\bar{\mathbf{w}}_1)^T (\mathbf{J}\bar{\mathbf{w}}_2) = \bar{\mathbf{w}}_1^T \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J}\right) \bar{\mathbf{w}}_2.$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{J}^T\mathbf{J} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T\mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T\mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T\mathbf{x}_v \end{bmatrix}.$$

Superfícies

Forma Fundamental

Podemos usar a primeira forma fundamental para:
1 – Medir o comprimento de uma curva sobre a superfície.

$$
\begin{aligned}
l(a,b) &= \int_a^b \sqrt{(u_t, v_t)\mathbf{I}(u_t, v_t)^T}\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \sqrt{Eu_t^2 + 2Fu_tv_t + Gv_t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Podemos usar a primeira forma fundamental para:

2 – Medir a área de uma região *U* sobre a superfície.

$$A = \iint_U \sqrt{\det(\mathbf{I})}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_U \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Superfícies

Definição de Curvatura

Curvatura Normal:

É curvatura da curva plana criada pela interseção da superfície e o plano gerado pelos vetores tangente e normal em um determinado ponto p.

Curvatura Normal:

É curvatura da curva plana criada pela interseção da superfície e o plano gerado pelos vetores tangente e normal em um determinado ponto p.

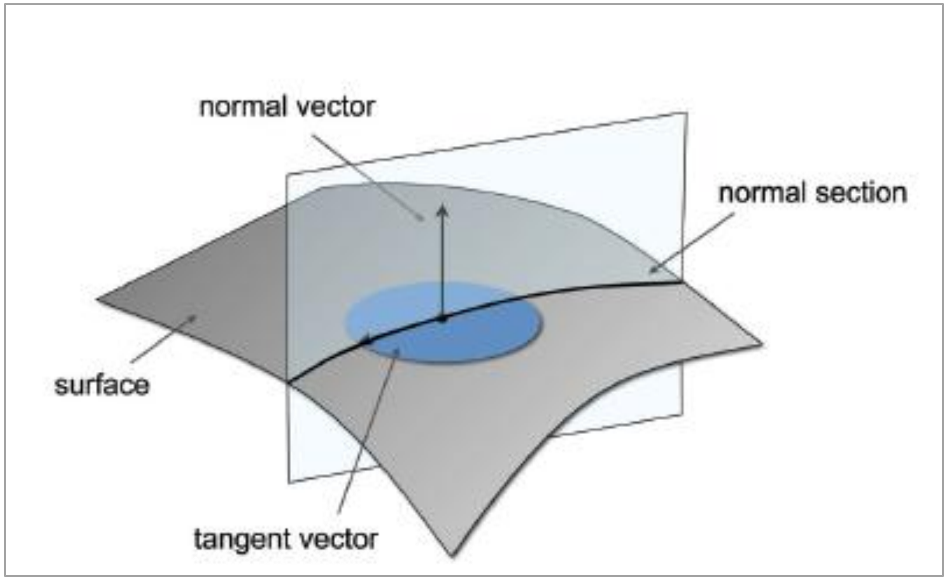
Notação: $\kappa_n(\bar{\mathbf{t}})$.

Superfícies

Definição de Curvatura

Curvatura Normal:

É curvatura da curva plana criada pela interseção da superfície e o plano gerado pelos vetores tangente e normal em um determinado ponto p.



Superfícies

Definição de Curvatura

Curvatura Normal:

Variando a direção $\bar{t}$, podemos mostrar que a curvatura normal tem dois extremos distintos, chamados curvaturas principais.

Superfícies

Definição de Curvatura

Curvatura Normal:

Variando a direção $\bar{t}$, podemos mostrar que a curvatura normal tem dois extremos distintos, chamados curvaturas principais.

Notação:

κ_1 curvatura máxima.

κ_2 curvatura mínima.

t_1 e t_2, direções principais.

Curvatura Normal:

Variando a direção $\bar{t}$, podemos mostrar que a curvatura normal tem dois extremos distintos, chamados curvaturas principais.

Podemos relacionar a curvatura normal com as curvaturas principais:

$$\kappa_n(\bar{t}) = \kappa_1 \cos^2 \psi + \kappa_2 \sin^2 \psi,$$

Curvatura Normal:

Variando a direção $\bar{\mathrm{t}}$, podemos mostrar que a curvatura normal tem dois extremos distintos, chamados curvaturas principais.

Podemos relacionar a curvatura normal com as curvaturas principais:

$$\kappa_n(\bar{\mathrm{t}}) \;=\; \kappa_1 \cos^2 \psi + \kappa_2 \sin^2 \psi,$$

Obs: Da equação vemos que as direções principais são ortogonais.

Curvatura Média:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Geometria Diferencial Discreta

Superfícies

Definição de Curvatura

Curvatura Média:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Superfícies

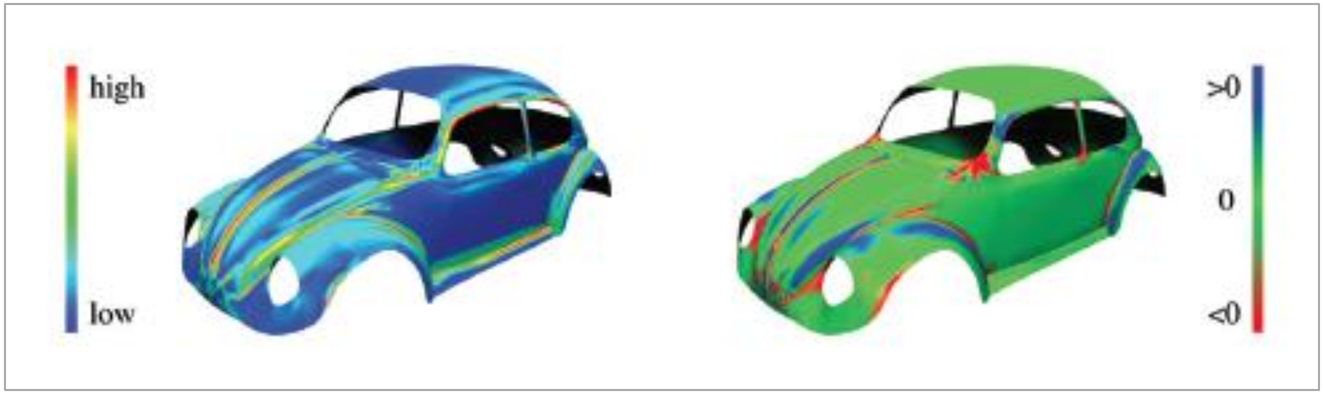
Definição de Curvatura

Curvatura Média:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$



Laplaciano de funções reais de duas variáveis:

$$\Delta f = \mathrm{div} \nabla f = \mathrm{div} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} = f_{uu} + f_{vv}.$$

Superfícies

Definição de Laplaciano

Laplaciano de funções reais de duas variáveis:

$$\Delta f = \mathrm{div}\nabla f = \mathrm{div}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} = f_{uu} + f_{vv}.$$

Laplaciano de funções definidas sobre uma superfície S.

$$\Delta_S f = \mathrm{div}_S \nabla_S f,$$

Geometria Diferencial Discreta

Superfícies

Definição de Laplaciano

Laplaciano de funções reais de duas variáveis:

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = \operatorname{div} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} = f_{uu} + f_{vv}.$$

Laplaciano de funções definidas sobre uma superfície S.

$$\Delta_{\mathcal{S}} f = \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}} f,$$

Podemos mostrar (e veremos mais à frente no caso discreto) que:

$$\Delta_{\mathcal{S}} \mathbf{x} = -2H\mathbf{n}.$$

Geometria Diferencial Discreta

Curvas

Superfícies

Operadores Discretos

Operadores Discretos

Os conceitos estudados até aqui exigem que a superfície seja suave.

Operadores Discretos

Os conceitos estudados até aqui exigem que a superfície seja suave.

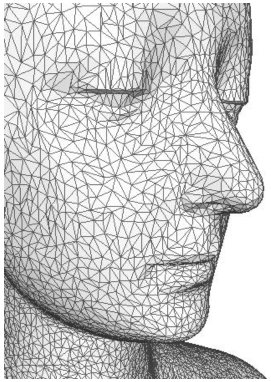
Ex: A curvatura é baseada na existência da segunda derivada.

Operadores Discretos

Os conceitos estudados até aqui exigem que a superfície seja suave.

Ex: A curvatura é baseada na existência da segunda derivada.

Malhas poligonais são superfícies lineares por partes ...
Precisamos adaptar os conceitos para este tipo de objeto!!



Geometria Diferencial Discreta

Operadores Discretos

Ponderação Local

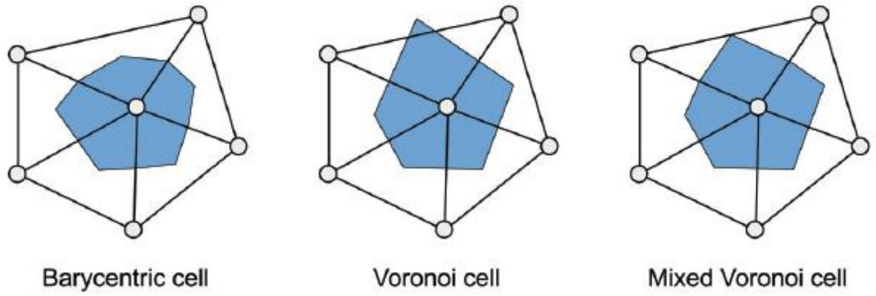
A ideia geral dos próximos slides é calcular propriedades diferenciais de forma discreta como médias sobre uma vizinhança local $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ de um ponto $\mathbf{x}$ da malha.

Operadores Discretos

Ponderação Local

A ideia geral dos próximos slides é calcular propriedades diferenciais de forma discreta como médias sobre uma vizinhança local $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ de um ponto $\mathbf{x}$ da malha.

Existem na literatura diversas propostas:



Operadores Discretos

Vetor Normal

O vetor Normal à um triângulo $T = (\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j, \mathrm{x}_j)$ pode ser calculado como o produto vetorial normalizado entre duas arestas do triângulo:

$$\mathbf{n}(T) \;=\; \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}{\|(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)\|}.$$

Geometria Diferencial Discreta

Operadores Discretos

Vetor Normal

O vetor Normal à um vértice v é calculado através de ponderações espaciais dos vetores normais dos triângulos incidentes à v.

$$\mathbf{n}(v) = \frac{\sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T)}{\left\| \sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T) \right\|}.$$

Notação para estrela

O vetor Normal à um vértice v é calculado através de ponderações espaciais dos vetores normais dos triângulos incidentes à v.

$$\mathbf{n}(v) = \frac{\sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T)}{\left\| \sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T) \right\|}.$$

Os pesos α_T podem ser escolhidos de diferentes formas:

1. Constante: Não leva em conta as medidas dos triângulos incidentes.

O vetor Normal à um vértice v é calculado através de ponderações espaciais dos vetores normais dos triângulos incidentes à v.

$$\mathbf{n}(v) = \frac{\sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T)}{\left\| \sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T) \right\|}.$$

Os pesos α_T podem ser escolhidos de diferentes formas:

1. Constante: Não leva em conta as medidas dos triângulos incidentes.
2. Área do triângulo: Pode gerar resultados não intuitivos.

Operadores Discretos | Vetor Normal

O vetor Normal à um vértice v é calculado através de ponderações espaciais dos vetores normais dos triângulos incidentes à v.

$$\mathbf{n}(v) = \frac{\sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T)}{\left\| \sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T) \right\|}.$$

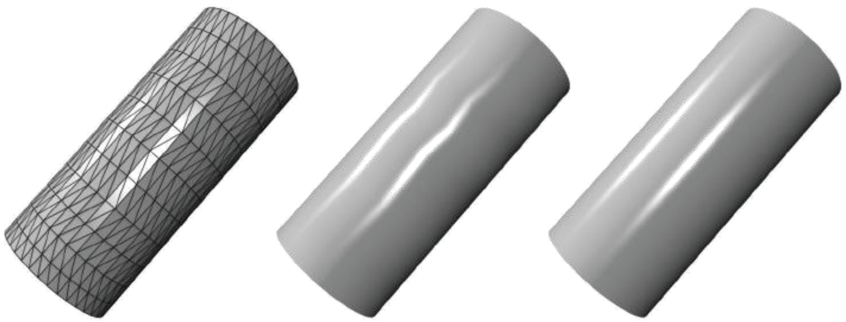
Os pesos α_T podem ser escolhidos de diferentes formas:

1. Constante: Não leva em conta as medidas dos triângulos incidentes.
2. Área do triângulo: Pode gerar resultados não intuitivos.
3. Ângulo do triângulo: Corresponde a tomar uma vizinhança suficientemente pequena.

O vetor Normal à um vértice v é calculado através de ponderações espaciais dos vetores normais dos triângulos incidentes à v.

$$\mathbf{n}(v) = \frac{\sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T)}{\left\| \sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \, \mathbf{n}(T) \right\|}.$$

Os pesos α_T podem ser escolhidos de diferentes formas.



Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Suponha que uma função f está definida sobre os vértices da malha:

$$\underbrace{f(v_i)}_{\text{Vértice da malha}} = \underbrace{f(\mathbf{x}_i)}_{\text{Vértice do triângulo}} = \underbrace{f(\mathbf{u}_i)}_{\text{Parametrização}} = f_i$$

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Podemos interpolar f linearmente dentro de um triângulo:

$$f(\mathbf{u}) = f_i B_i(\mathbf{u}) + f_j B_j(\mathbf{u}) + f_k B_k(\mathbf{u}),$$

Geometria Diferencial Discreta

Operadores Discretos

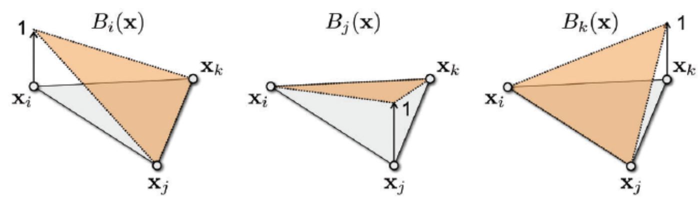
Vetor Gradiente

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Podemos interpolar f linearmente dentro de um triângulo:

$$f(\mathbf{u}) \;=\; f_i B_i(\mathbf{u}) + f_j B_j(\mathbf{u}) + f_k B_k(\mathbf{u}),$$

Onde:



Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Podemos interpolar f linearmente dentro de um triângulo:

$$f(\mathbf{u}) \;=\; f_i B_i(\mathbf{u}) + f_j B_j(\mathbf{u}) + f_k B_k(\mathbf{u}),$$

Logo:

$$\nabla f(\mathbf{u}) \;=\; f_i \nabla B_i(\mathbf{u}) + f_j \nabla B_j(\mathbf{u}) + f_k \nabla B_k(\mathbf{u}).$$

Operadores Discretos

Vetor Gradiente

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Como:

$$B_i(\mathbf{u}) + B_j(\mathbf{u}) + B_k(\mathbf{u}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \nabla B_i(\mathbf{u}) + \nabla B_j(\mathbf{u}) + \nabla B_k(\mathbf{u}) = 0.$$

Temos:

$$\nabla f(\mathbf{u}) \; = \; (f_j - f_i)\nabla B_j(\mathbf{u}) + (f_k - f_i)\nabla B_k(\mathbf{u}).$$

Operadores Discretos

Vetor Gradiente

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Como:

$$B_i(\mathbf{u}) + B_j(\mathbf{u}) + B_k(\mathbf{u}) = 1 \Rightarrow \nabla B_i(\mathbf{u}) + \nabla B_j(\mathbf{u}) + \nabla B_k(\mathbf{u}) = 0.$$

Temos:

$$\nabla f(\mathbf{u}) = (f_j - f_i)\underbrace{\nabla B_j(\mathbf{u})}_{?} + (f_k - f_i)\underbrace{\nabla B_k(\mathbf{u})}_{?}.$$

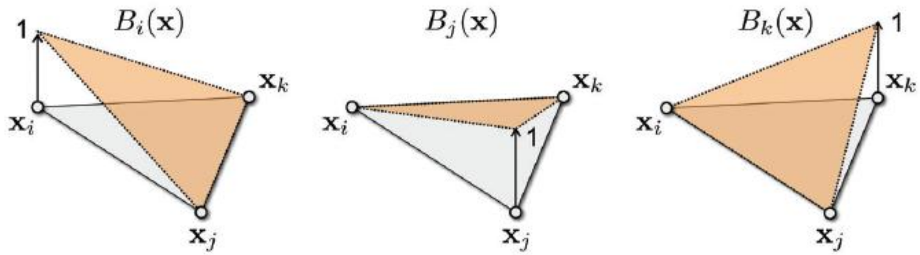
Geometria Diferencial Discreta

Operadores Discretos

Vetor Gradiente

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Pela ilustração, vemos que a direção de maior crescimento da função base B_i é ortogonal a aresta oposta ao vértice $\mathbf{x}_i$.



Operadores Discretos

Vetor Gradiente

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Pela ilustração, vemos que a direção de maior crescimento da função base B_i é ortogonal a aresta oposta ao vértice $\mathbf{x}_i$.

$$\nabla B_i(\mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^{\perp}}{2\,A_T},$$

Geometria Diferencial Discreta

Operadores Discretos

Vetor Gradiente

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Finalmente, temos:

$$\nabla f(\mathbf{u}) = (f_j - f_i)\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^\perp}{2A_T} + (f_k - f_i)\frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^\perp}{2A_T}.$$

Operadores Discretos

Operador Laplaciano

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Pelo teorema de Stokes ...

$$\int_{A_i} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}A = \int_{\partial A_i} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}s.$$

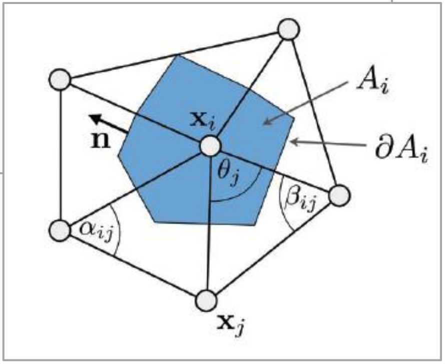
Operadores Discretos

Operador Laplaciano

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Pelo teorema de Stokes ...

$$\int_{A_i} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}A = \int_{\partial A_i} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}s.$$



Geometria Diferencial Discreta

Operadores Discretos

Operador Laplaciano

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Logo, temos...

$$\int_{A_i} \Delta f(\mathbf{u})\,\mathrm{d}A \;=\; \int_{A_i} \mathrm{div}\nabla f(\mathbf{u})\,\mathrm{d}A \;=\; \int_{\partial A_i} \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}s.$$

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Como a região de integração passa pelos pontos médios da aresta do triângulo e o gradiente é constante no triângulo ...

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_i \cap T} \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) \mathrm{d}s &= \nabla f(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})^{\perp} \\ &= \frac{1}{2} \nabla f(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^{\perp}. \end{aligned}$$

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Finalmente...

$$A_T = \frac{1}{2}\sin\gamma_j\,\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|\,\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\| = \frac{1}{2}\sin\gamma_k\,\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|\,\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|$$

$$\cos\gamma_j = \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\cdot(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|} \qquad \cos\gamma_k = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)\cdot(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|}$$

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Temos:

$$\int_{A_i} \Delta f(\mathbf{u}) \mathrm{d}A = \frac{1}{2} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} (\cot \alpha_{i,j} + \cot \beta_{i,j})(f_j - f_i),$$

Geometria Diferencial Discreta

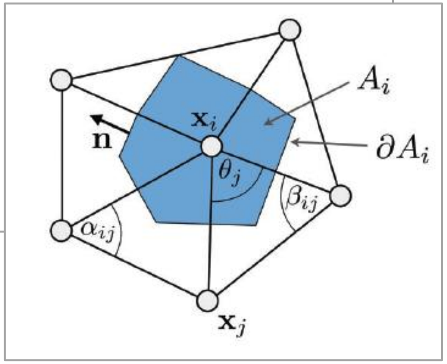
Operadores Discretos

Operador Laplaciano

Para definir o operador Laplaciano (das cotangentes) sobre em malhas poligonais, precisaremos do gradiente de uma função definida sobre uma malha.

Temos:

$$\Delta f(v_i) := \frac{1}{2A_i} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} \left(\cot\alpha_{i,j} + \cot\beta_{i,j}\right)\left(f_j - f_i\right).$$



Vimos anteriormente que a curvatura média é:

$$H(v_i) = \frac{1}{2} \|\Delta \mathbf{x}_i\| .$$

Podemos aproximar a curvatura Gaussiana por:

$$K(v_i) = \frac{1}{A_i} \left(2\pi - \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} \theta_j \right) ,$$

Usando as curvaturas média e gaussiana, podemos escrever as curvaturas principais:

$$\kappa_{1,2}(v_i) \;=\; H(v_i) \pm \sqrt{H(v_i)^2 - K(v_i)}.$$